

## EJERCICIOS DE COLOQUIO DE FECHA 29-6-10

**Ej. 1 – Hallar a y b tal que  $\iint_D 4x^2 dx dy$  donde  $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $a > 0, b > 0$ , tome el máximo valor, si  $a^2 + b^2 = 5$ .**

Sol: Usamos coordenadas polares generalizadas:  $\begin{cases} x = a\rho \cos(\theta) \\ y = b\rho \sin(\theta) \end{cases}$

el Jacobiano es  $J = ab\rho$

$$\begin{aligned} \iint_D 4x^2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 4a^2 \rho^2 \cos^2(\theta) ab\rho d\rho d\theta = 4a^3 b \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^3 \cos^2(\theta) d\rho d\theta = \\ 4a^3 b \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 \cos^2(\theta) d\theta &= a^3 b \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{a^3 b}{2} \left[ \theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi a^3 b \end{aligned}$$

**La función a extremar es  $f(a, b) = \pi a^3 b$  con la condición:  $a^2 + b^2 = 5$**

**Por Lagrange:**  $L(a, b, \lambda) = \pi a^3 b + \lambda(a^2 + b^2 - 5)$

Derivando respecto a las variables  $a, b, \lambda$  e igualando a cero (0) y resolviendo el sistema resulta

$$a = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad y \quad b = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

El ejercicio también se puede hacer parametrizando la curva:

$a^2 + b^2 = 5 \rightarrow \bar{g}(t) = (\sqrt{5} \cos(t), \sqrt{5} \sin(t))$  y calculando los extremos de la función

compuesta:  $\underline{h(t) = (f \circ \bar{g})(t) = \pi (\sqrt{5} \cos(t))^3 (\sqrt{5} \sin(t))}$

**Ej.2- Demostrar que la Circulación del campo vectorial  $\bar{f}(x, y) = (xe^{sh(x)} - \mu xy + y, 2x + \cos(ye^y))$ , siendo  $\mu \in \mathbb{R}$ , a lo largo de la curva C solución de  $x dx + (y-1) dy = 0$ , que pasa por (0, 2) y orientada positivamente es independiente de  $\mu$ .**

**Sol:** La curva solución C, se determina resolviendo la Ecuación Diferencial por Variables Separables, resultando la circunferencia con centro en (0, 1) y radio 1, cuya ecuación es:  $x^2 + (y-1)^2 = 1$ . Aplicando Teorema de Green:

$$\oint_{C^+} \bar{f} \cdot d\bar{l} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2 + \mu x - 1 = 1 + \mu x$$

Pasando a coordenadas polares:  $\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = 1 + \rho \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad |J| = \rho$

$$\text{Circulación} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + \mu \rho \cos(\theta)) \rho \, d\rho \, d\theta = \pi$$

Luego la circulación no depende de  $\mu$ .